

Eine Anwendung
des Selbergschen Siebes
auf algebraische Zahlkörper

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

von
Heldrun Sarges
aus Prostken

Marburg/Lahn 1973

Eine Anwendung des Selbergschen Siebes
auf algebraische Zahlkörper

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg

von
Heidrun Sarges
aus Frostken

Marburg/Lahn 1973



Vom Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen : 07.9.73

Tag der mündlichen Prüfung : 12.9.73

Berichtertatter : Prof. Dr. W. Schaal

Mitberichterstatter : Prof. Dr. K.-B. Gundlach

Inhalt

1. Einleitung, Formulierung der Ergebnisse	1
2. Definitionen und einfache Folgerungen	4
3. Die Funktion $\chi(\mathfrak{f})$	8
4. Die Funktion $\overline{1}_k(z)$	12
5. Die Funktion $G(\mathfrak{a})$	16
6. Die Funktion $\frac{1}{f_1(\mathfrak{a})}$	25
7. Obere und untere Abschätzungen von $A_k(M_{\mathfrak{a}}, z)$ in Analogie zu [7]	27
8. Einführung von Gewichten beim Siebprozeß in Analogie zu [5]	33
9. Anwendungen	38



Digitized by the Internet Archive
in 2026

1. Mittels der Selbergschen Siebmethode bewiesen Jurkat und Richert [4] unter anderem folgende Resultate:

a) Für $\varepsilon > 0$ und $x \geq x_0(\varepsilon)$ gibt es mindestens zwei ganze Zahlen n in dem Intervall

$$x - x^{\frac{14}{25} + \varepsilon} < n \leq x,$$

die höchstens zwei Primfaktoren besitzen.

b) Für $\varepsilon > 0$, $k \geq k_0(\varepsilon)$ und $(k, 1) = 1$ existiert mindestens eine ganze Zahl n ,

$$n \equiv 1 \pmod{k}, \quad 1 \leq n \leq k^{\frac{25}{14} + \varepsilon},$$

die höchstens zwei Primfaktoren besitzt.

Diese Ergebnisse wurden von Schaal [7] mit etwas abweichenden Methoden auf algebraische Zahlkörper übertragen.

Richert [5] erreicht eine weitere Verschärfung der Ergebnisse aus [4], indem er neue Gewichtsfunktionen einführt ([5], Theorem 1).

Zudem wird der Bereich der zugelassenen Mengen, auf die der Siebprozeß angewendet wird, erweitert ([5], Theorem A, Theorem B, Einführung der Funktion χ).

Als Anwendungen werden unter anderem folgende Ergebnisse bewiesen:

c) Für $x \geq x_0$ gibt es mindestens eine ganze Zahl n in dem Intervall

$$x - x^{\frac{6}{11}} < n \leq x,$$

die höchstens zwei Primfaktoren besitzt.

Die Intervalllänge ist hier, im Vergleich zu a), etwas geringer.

d) Sei $F(x)$ ein irreduzibles Polynom vom Grade $g \geq 1$ mit ganzen Koeffizienten und ohne festen Primteiler.

Dann gilt:

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \Omega(F(n)) \leq g+1 \quad 1 \geq \frac{2}{3} \prod_p \frac{1 - \frac{g(p)}{p}}{1 - \frac{1}{p}} \frac{N}{\log N} \quad \text{für } N \geq N_0(F).$$

Dabei bedeutet $g(p)$ die Anzahl der Lösungen mod p von $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$

und $\Omega(m)$ die Anzahl der mit ihrer Vielfachheit gezählten Primteiler von m .

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese beiden Resultate auf algebraische Zahlkörper zu übertragen.*)

Dabei folge ich zunächst der Arbeit von Schaal [7] und leite den dortigen Hauptsatz für einen größeren Anwendungsbereich her.

Entsprechend der Methode von Richert kann man daraus eine untere Abschätzung gewinnen, die die zu c) und d) analogen Ergebnisse für Zahlkörper liefert:

Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Sei K ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n über $\mathbb{Q}$ mit der Diskriminante d .

Die Konjugierten der Zahlen $\xi \in K$ werden mit $\xi^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, n$, bezeichnet sei $N(\xi) = \xi^{(1)} \dots \xi^{(n)}$.

*) Herrn Prof. Dr. W. Schaal, der dieses Thema anregte, danke ich für seine Unterstützung.

Satz A. Sei $y_v > 0$, $v = 1, \dots, n$, und $y := y_1 \cdots y_n$.

Dann gilt:

Für $y \geq Y_0(K)$ gibt es mindestens eine ganze Zahl $\xi \in K$ mit

$$y_v - y_v^{\frac{6}{11}} < \xi^{(v)} \leq y_v, \quad v = 1, \dots, n,$$

die höchstens zwei Primidealfaktoren besitzt.

Dieses Ergebnis enthält eine leichte Verschärfung von [7], Satz 2.

Satz B. Sei $y_v \geq 1$, $v = 1, \dots, n$, und $y := y_1 \cdots y_n$.

Sei $F(x) \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grade $g \geq 1$ mit ganzen algebraischen Koeffizienten und ohne festen Primidealteiler.

Sei $M := \{ F(\xi) / \xi \in K, \xi \text{ ganz}, 0 < \xi^{(v)} \leq y_v, v = 1, \dots, n \}$.

Dann gilt:

$$\sum_{\substack{\alpha \in M \\ \Omega(\alpha) \leq g+1}} 1 \geq \frac{2}{3} \frac{B}{\alpha_K} \prod_{\mathfrak{f}} \frac{1 - \frac{\gamma(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}}}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{f}}} \frac{y}{\log y} \quad \text{für } y \geq Y_0(K, F).$$

Dabei bedeutet $\gamma(\mathfrak{f})$ die Anzahl der Lösungen mod $\mathfrak{f}$ von $F(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{f}}$,

$\mathfrak{f}$ Primideal aus K , α_K das Residuum von $\zeta_K(s)$, der Dedekindschen Zetafunktion von K , $\Omega(\alpha)$ die Anzahl der mit ihrer Vielfachheit gezählten Primidealteiler von α und $B = \frac{1}{|d_K|}$.

Die Einschränkung von K auf total reelle Zahlkörper ist in Satz B leicht zu vermeiden, macht aber die Formulierungen übersichtlicher.

2. Sei $F(x) \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom mit ganzen algebraischen Koeffizienten und ohne festen Primidealteiler.

(2.1) Seien $y_1, \dots, y_n$ positive Zahlen und sei $y := y_1 \dots y_n$.

(2.2) Seien $h_1, \dots, h_n$ positive Zahlen mit $h_v \leq y_v$, $v = 1, \dots, n$,
und sei $h := h_1 \dots h_n$.

(2.3) Sei $I := \left\{ \xi \in K \mid \xi \text{ ganz, } y_v - h_v < \xi^{(v)} \leq y_v, v = 1, \dots, n \right\}$.

(2.4) Dann sei $M := \left\{ F(\xi) \mid \xi \in I \right\}$.

Sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal aus K . Man definiere

(2.5) $M_{\mathfrak{a}} := \left\{ \alpha \in M \mid \alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}} \right\}$.

Auf die Elemente von $M_{\mathfrak{a}}$ wird später der Siebprozeß angewendet.

Fortan bezeichne $\mathfrak{p}$ Primideale aus K , und es sei $\mathfrak{p}_0 := (1)$.

Wie in [7] werde eine Anordnung der Primideale erklärt:

$\mathfrak{p}_v$ sei vor $\mathfrak{p}_\mu$, falls $N\mathfrak{p}_v < N\mathfrak{p}_\mu$.

Die Primideale gleicher Norm ordne man beliebig, aber fest an.

Durch diese Anordnung lassen sich gewisse Identitäten beweisen.

Später kann man sich von dieser Anordnung wieder befreien.

Sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal aus K , g eine ganze Zahl, $g \geq 0$, z reell, $z \geq 0$.

Dann sei:

$$(2.6) \quad P_{\mathfrak{a}}^*(g) := \prod_{v=1}^g \mathfrak{p}_v, \quad P_{\mathfrak{a}}(z) := \prod_{N\mathfrak{p} < z} \mathfrak{p}.$$

Der Strich am Produktzeichen soll besagen: $\mathfrak{p}_v \nmid \mathfrak{a}$, bzw. $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a}$.

Die gleiche Beschränkung möge der Strich auch am Summenzeichen bedeuten

Ferner sollen leere Produkte gleich 1, leere Summen gleich 0 gesetzt sein.

Es seien folgende Anzahlfunktionen erklärt:

$$(2.7) \quad \begin{cases} A_k^*(M_{\alpha}, \xi) := |\{\alpha \in M_{\alpha} / (\alpha, P_k^*(\xi))=1\}| & \text{für } (\alpha, P_k^*(\xi))=1 \\ A_k(M_{\alpha}, z) := |\{\alpha \in M_{\alpha} / (\alpha, P_k(z))=1\}| & \text{für } (\alpha, P_k(z))=1 \end{cases}$$

Es ist das Ziel der Paragraphen 2 bis 7, für $A_k(M_{\alpha}, z)$ eine obere und eine untere Abschätzung herzuleiten.

Wie man mit Hilfe vollständiger Induktion nach ξ leicht sieht, gilt für $\xi \geq 0$, α ganz mit $(\alpha, P_k^*(\xi))=1$, folgende Identität:

$$(2.8) \quad A_k^*(M_{\alpha}, \xi) = |M_{\alpha}| - \sum_{\nu=1}^{\xi-1} A_k^*(M_{\alpha}, \nu-1)$$

(2.9) Sei $\gamma(\alpha)$ die Anzahl der Lösungen $\bmod \alpha$ von $F(x) \equiv 0 \bmod \alpha$.

Auf die Funktion $\gamma(\alpha)$ wird man bei der Bestimmung von $|M_{\alpha}|$ geführt, denn es gilt:

$$(2.10) \quad |M_{\alpha}| = \gamma(\alpha) \left\{ B \frac{h}{N\alpha} + O \left[\left(\frac{h}{N\alpha} \right)^{1-\frac{1}{n}} + 1 \right] \right\} \quad \text{mit } B := \frac{1}{|\sqrt{d}|}$$

Das ergibt sich mit den Bezeichnungen (2.2), (2.3), (2.4), (2.5)

folgendermaßen:

$$|M_{\alpha}| = \sum_{\substack{\xi \in I \\ F(\xi) \equiv 0 \bmod \alpha}} 1 = \sum_{\substack{\beta \bmod \alpha \\ F(\beta) \equiv 0 \bmod \alpha}} 1 = \sum_{\substack{\xi \in I \\ \xi \equiv \beta \bmod \alpha}} 1$$

Nach [6], Hilfssatz 9, ist

$$\sum_{\substack{\xi \in I \\ \xi \equiv \beta \bmod \alpha}} 1 = B \frac{h}{N\alpha} + O \left[\left(\frac{h}{N\alpha} \right)^{1-\frac{1}{n}} + 1 \right]$$

Die dortige Bedingung (85) ist erfüllt, wenn man berücksichtigt, daß man aufgrund einer Bemerkung von Siegel ([8], Hilfssatz 6) durch Multiplikation

mit einer geeigneten Einheit von K stets erreichen kann:

$$h_v \leq c_1 \frac{1}{h^n}, \quad v = 1, \dots, n, \quad c_1 = c_1(K).$$

Damit und mit (2.9) ergibt sich (2.10).

Die Funktion $\gamma(\alpha)$ spielt im Laufe der weiteren Rechnungen eine wichtige Rolle. Folgende Eigenschaften von $\gamma(\alpha)$ ergeben sich sofort:

- 1) $\gamma(\alpha)$ ist multiplikativ,
- 2) $\gamma(\varphi) \leq N\varphi - 1$, da $F(x)$ keine festen Primidealteiler besitzt,
- 3) $\gamma(\varphi) \leq \varepsilon$.

Sei $F(x) = \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_0$, und sei θ die Diskriminante von $F(x)$:

$$(2.11) \quad \theta := \alpha_2^{2g-2} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^g (\beta_i - \beta_j),$$

wobei β_i, β_j die Nullstellen von $F(x)$ durchlaufen.

Dann läßt sich eine weitere Eigenschaft von $\gamma(\alpha)$ zeigen:

$$(2.12) \quad \gamma(\varphi^2) = \gamma(\varphi) \quad \text{für} \quad \varphi, \theta.$$

Für den rationalen Fall sind diese Fragen von Nagel [3] ausführlicher behandelt. Die dortigen Beweise gelten entsprechend auch im Zahlkörper.

Eine Folgerung aus (2.12) ist:

$$(2.13) \quad \gamma(\varphi^2) \leq \max_{\varphi' \mid \theta} \{ \varepsilon, \gamma(\varphi'^2) \}.$$

Es werden noch die folgenden Hilfsfunktionen eingeführt, die im Zusammenhang mit $\chi(\sigma)$ stehen:

$$(2.14) \quad \text{Für } \sigma = \prod_{f|\sigma} f^{1f} \quad \text{sei} \quad G(\sigma) := \prod_{f|\sigma} \chi(f)^{1f}.$$

Es gilt:

- 1) $G(\sigma)$ ist vollständig multiplikativ,
- 2) $G(\sigma) = \chi(\sigma)$, falls $\mu^2(\sigma) = 1$, und
- 3) insbesondere $G(f) = \chi(f)$.

$$(2.15) \quad \text{Sei} \quad \frac{1}{f_1(\sigma)} := \frac{\chi(\sigma)}{\chi(\sigma)} \prod_{f|\sigma} \frac{1}{f^{1f}} = \frac{1}{\chi(\sigma)}.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß in den Untersuchungen dieser Arbeit $\frac{1}{f_1(\sigma)}$ stets wohldefiniert ist wegen $\chi(f) < Nf$.

Letzteres gilt, da $F(x)$ keine festen Primidealteiler besitzt.

Es ergeben sich die Zusammenhänge:

$$(2.16) \quad \frac{N\sigma}{G(\sigma) f_1(\sigma)} = \prod_{f|\sigma} \frac{1}{f_1(f)} \quad \text{für } \mu^2(\sigma) = 1,$$

$$(2.17) \quad \frac{G(\sigma) f_1(\sigma)}{f_1(\sigma)} = \sum_{f|\sigma} \frac{\mu(f) G(f)}{Nf},$$

$$(2.18) \quad \frac{\chi(\sigma)}{G(\sigma)} = \sum_{f|\sigma} f_1(f) \quad \text{für } G(\sigma) \neq 0.$$

Mit k, g, z wie in (2.6), $z \geq 2$, sei

$$\dots \quad \chi(\sigma) := \prod_{f|\sigma} \chi(f)^{1f} = \chi(\sigma) \prod_{f|\sigma} \chi(f)^{1f}, \quad \chi(\sigma) := \prod_{f|\sigma} \chi(f)^{1f} = \chi(\sigma) \prod_{f|\sigma} \chi(f)^{1f}.$$

3. Zunächst soll $\gamma(\mathfrak{p})$ näher untersucht werden. Es erweist sich, daß $\gamma(\mathfrak{p})$ "im Mittel" 1 ist.

Folgende Sätze aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper werden wesentlich benötigt:

Sei β eine Nullstelle von $F(x)$. Sei $E := K(\beta)$ die zugehörige Körpererweiterung. Mit $\mathcal{V}$ bezeichne man die Relativdifferente von E nach K , und es sei θ wie in (2.11) definiert. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus K mit $\mathfrak{p} \nmid \theta$.

Dann gilt nach Kummer ([9], Seite 317) mit der in (2.9) definierten Lösungszahl γ^* :

(3.1) $\gamma(\mathfrak{p})$ ist gleich der Anzahl der verschiedenen Primidealfaktoren ersten Grades bzgl. K von $\mathfrak{p}$ in E .

Nach Landau [2] gilt für $x \geq 2$ und beliebige algebraische Zahlkörper L :

$$(3.2) \quad \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} 1 = \text{li } x + O(x e^{-c_2 \sqrt{\log x}}), \quad c_2 = c_2(L).$$

Damit nun lassen sich die folgenden Lemmata beweisen.

(Die 0-Konstanten in diesem und den folgenden Paragraphen hängen von K und $F(x)$ ab, sofern nichts anderes vermerkt ist.)

Lemma 3.1. Für $x \geq 2$ gilt:

$$(3.3) \quad \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \gamma(\mathfrak{p}) = \text{li } x + O(x e^{-c_3 \sqrt{\log x}}), \quad c_3 = c_3(K, F).$$

Beweis. Sei β eine Nullstelle von $F(x)$, $E := K(\beta)$.

Weiter werden in diesem Beweis mit $\mathfrak{q}$ Primideale aus E , mit $\mathfrak{f}$ Primideale aus K bezeichnet.

Es sei $N_{\mathfrak{f}}$ die Norm von K nach $\mathbb{Q}$,

$N_E \mathfrak{q}$ die Norm von E nach $\mathbb{Q}$,

$N_{E,K} \mathfrak{q}$ die Norm von E nach K .

Zunächst gilt:

$$\sum_{\substack{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x \\ \mathfrak{f} \times \mathfrak{q} \in \mathfrak{p}}} r(\mathfrak{f}) = \sum_{\substack{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x \\ \mathfrak{f} \times \mathfrak{q} \in \mathfrak{p}}} r(\mathfrak{f}) + \sum_{\substack{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x \\ \mathfrak{f} \times \mathfrak{q} \notin \mathfrak{p}}} r(\mathfrak{f}) .$$

Nach (3.1) und wegen $N_E \mathfrak{q} = N(N_{E,K} \mathfrak{q})$ ist weiter:

$$\sum_{\substack{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x \\ \mathfrak{f} \times \mathfrak{q} \in \mathfrak{p}}} r(\mathfrak{f}) = \sum_{\substack{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x \\ \mathfrak{f} \times \mathfrak{q} \in \mathfrak{p}}} 1 = \sum_{\substack{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x \\ \mathfrak{f} \times \mathfrak{q} \in \mathfrak{p}}} 1 - \sum_{\substack{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x \\ \mathfrak{f} \times \mathfrak{q} \notin \mathfrak{p}}} 1 - \sum_{\substack{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x \\ \mathfrak{f} \times \mathfrak{q} \notin \mathfrak{p}}} 1 .$$

Daraus folgt zusammen mit (3.2), $L = E$, die Behauptung (3.3).

Lemma 3.2. Für $x \geq 2$ gilt :

$$(3.4) \quad \sum_{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x} \frac{r(\mathfrak{f})}{N_{\mathfrak{f}}} = \log \log x + D_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) .$$

Hierbei ist D_1 eine Konstante, die von K und $F(x)$ abhängt.

Beweis. Partielle Summation ergibt mit (3.3):

$$\sum_{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x} \frac{r(\mathfrak{f})}{N_{\mathfrak{f}}} = \sum_{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq x} r(\mathfrak{f}) \frac{1}{x} + \int_2^x \sum_{\mathfrak{f} \mathfrak{q} \leq u} r(\mathfrak{f}) \frac{1}{u^2} du =$$

$$= O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_2^x \left[\frac{u}{\log u} + O\left(\frac{u}{\log^2 u}\right) \right] \frac{1}{u^2} du .$$

Mit $D_1 := \int_2^\infty O\left(\frac{1}{u \log^2 u}\right) du = \log \log 2$ folgt daraus (3.4).

Lemma 3.3. Für $x \geq 2$ gilt

$$(3.5) \quad \sum_{Nf \leq x} \gamma(f) \frac{\log Nf}{Nf} = \log x + O(1) .$$

Beweis. Partielle Summation ergibt mit (3.3):

$$\begin{aligned} \sum_{Nf \leq x} \gamma(f) \frac{\log Nf}{Nf} &= \sum_{Nf \leq x} \gamma(f) \frac{\log x}{x} - \int_2^x \sum_{Nf \leq u} \gamma(f) \frac{1 - \frac{\log u}{u^2}}{u^2} du \\ &= O(1) - \int_2^x \left[\frac{u}{\log u} + \frac{u}{\log^2 u} + O\left(\frac{u}{\log^3 u}\right) \right] \frac{1 - \frac{\log u}{u^2}}{u^2} du . \end{aligned}$$

Daraus folgt (3.5).

Für $K = \mathbb{Q}$ ist die (3.5) entsprechende Asymptotik in [3] hergeleitet.

Wählt man $F(x) = x$, so wird $\gamma(f) = 1$ für alle f .

(3.3) (3.4), (3.5) gehen dann wieder in die von Landau wohlbekannten Beziehungen über. Insbesondere erhält man für $x \geq 2$:

$$(3.6) \quad \sum_{Nf \leq x} \frac{\log Nf}{Nf} = \log x + O(1) .$$

Aus (3.5) und (3.6) folgt für $2 \leq z \leq w$:

$$\sum_{z \leq Nf < w} \frac{(\gamma(f) - 1) \log Nf}{Nf} = O(1) .$$

Weiter ergibt sich daraus durch partielle Summation:

$$(3.7) \quad \sum_{Np \leq f} \frac{\delta(p) - 1}{Np^s} = O\left(\frac{1}{\log z}\right).$$

Lemma 3.4. Für $s \geq 1$ ist das Produkt

$$(3.8) \quad \prod_{f \leq Np} \frac{1 - \frac{\delta(p)}{Np^s}}{1 - \frac{1}{Np^s}} \quad \text{gleichmäßig konvergent.}$$

Beweis.

$$\frac{1 - \frac{\delta(p)}{Np^s}}{1 - \frac{1}{Np^s}} = 1 + \frac{1 - \delta(p)}{Np^s - 1}.$$

Aus den Eigenschaften von $\delta(p)$ folgt: Es existiert ein ε , $0 < \varepsilon < 1$, mit $\left| \frac{1 - \delta(p)}{Np^s - 1} \right| < \varepsilon$ für alle p mit $Np > 2$, für alle $s \geq 1$.

Für $|x| < \varepsilon$ gilt: $\log(1+x) = x + O(x^2)$.

Deshalb folgt für $2 \leq z \leq w$:

$$\begin{aligned} \log \prod_{z \leq Np < w} \frac{1 - \frac{\delta(p)}{Np^s}}{1 - \frac{1}{Np^s}} &= \sum_{z \leq Np < w} \log \left\{ 1 + \frac{1 - \delta(p)}{Np^s - 1} \right\} \\ &= \sum_{z \leq Np < w} \frac{1 - \delta(p)}{Np^s - 1} + O\left(\sum_{z \leq Np < w} \frac{1}{Np^{2s}}\right) = O\left(\frac{1}{\log z}\right) \quad \text{wegen (3.7).} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(3.9) \quad \prod_{z \leq Np < w} \frac{1 - \frac{\delta(p)}{Np^s}}{1 - \frac{1}{Np^s}} = 1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right).$$

Das ergibt die Behauptung (3.8).

Man setze:

$$(3.10) \quad \frac{1 - \frac{\delta(p)}{Np^s}}{1 - \frac{1}{Np^s}}.$$

Für $K = 0$ ist diese Konvergenz in [5] nachgewiesen worden.

4. Es sollen die in (2.19) definierten Funktionen $T_k^*(\zeta)$ und $T_k(z)$ näher untersucht werden.

Sei α_k das Residuum von $S_k(s)$, γ_0 die Eulersche Konstante. Dann gilt nach [7], Seite 274 :

$$(4.1) \quad \prod_{Np < x} \left(1 - \frac{1}{Np}\right) = \frac{e^{-\gamma_0}}{\alpha_k} \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right).$$

Sei $\omega(k)$ die Anzahl der verschiedenen Primidealteiler von k . Dann gilt ebenfalls nach [7], Seite 272 :

$$(4.2) \quad \omega(k) = O\left(\frac{\log Nk}{\log \log 3Nk}\right).$$

Lemma 4.1. Für $z \geq 2$, $\log Nk \leq \frac{z}{\log z}$ gilt

$$(4.3) \quad T_k(z) = \frac{Nk}{G(k)I_1(k)} C(F) \frac{e^{-\gamma_0}}{\alpha_k} \frac{1}{\log z} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right) \right\}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} T_k(z) &= \prod_{Np < z} \left(1 - \frac{\delta(p)}{Np}\right) \\ &= \prod_{\substack{Np < z \\ p/k}} \frac{1}{1 - \frac{\delta(p)}{Np}} \prod_{Np < z} \frac{1 - \frac{\delta(p)}{Np}}{1 - \frac{1}{Np}} \prod_{Np < z} \left(1 - \frac{1}{Np}\right) \\ &= \prod_{\substack{p/k \\ p/k}} \frac{1}{1 - \frac{\delta(p)}{Np}} \prod_{\substack{Np \geq z \\ p/k}} \left(1 - \frac{\delta(p)}{Np}\right) C(F) \prod_{Np \geq z} \frac{1 - \frac{1}{Np}}{1 - \frac{\delta(p)}{Np}} \prod_{Np < z} \left(1 - \frac{1}{Np}\right) \end{aligned}$$

Mit (2.15), (3.9), (3.10) und (4.1) folgt daraus :

$$\Gamma_k(z) = \frac{Nk}{G(k)f_1(k)} \prod_{\substack{Np \geq z \\ p/k}} (1 - \frac{\chi(p)}{Np}) \cdot \frac{C(F)}{1 + O(\frac{1}{\log z})} \left\{ \frac{e^{-\chi_0}}{\alpha_k \log z} + O(\frac{1}{\log z}) \right\}$$

Es bleibt zu zeigen:
$$\prod_{\substack{Np \geq z \\ p/k}} (1 - \frac{\chi(p)}{Np}) = 1 + O(\frac{1}{\log z}) .$$

Für $z < g$ ist das erfüllt, man wähle als 0-Konstante z.B. $\log 2g$.

Für $z \geq g$ gilt:

$$\prod_{\substack{Np \geq z \\ p/k}} (1 - \frac{\chi(p)}{Np}) \geq (1 - \frac{g}{z}) \geq 1 - \frac{g \omega(k)}{z} .$$

Mit (4.2) und der Voraussetzung von Lemma 4.1 folgt weiter:

$$1 - \frac{g \omega(k)}{z} \geq 1 - c_4 g \frac{\log Nk}{z} = 1 - c_4 g \frac{1}{\log z} , \quad c_4 = c_4(K) .$$

Insgesamt folgt (4.3).

Korollar 4.1. Für $\varphi \geq 1$, $\log Nk \leq \frac{Nf_\varphi}{\log Np_\varphi}$ gilt

$$(4.4) \quad \Gamma_k^*(\varphi) = \frac{Nk}{G(k)f_1(k)} C(F) \frac{e^{-\chi_0}}{\alpha_K} \frac{1}{\log Np_\varphi} \left\{ 1 + O(\frac{1}{\log Np_\varphi}) \right\} .$$

Beweis. Nach (2.19) ist
$$\Gamma_k^*(\varphi) = \Gamma_k^*(Np_\varphi) \prod_{\substack{Np_v \geq Np_\varphi \\ p_v = Np_\varphi}} (1 - \frac{\chi(p_v)}{Np_v}) .$$

Ferner ist

$$\prod_{\substack{v \leq f \\ N_{f,v} = N_{f,v}}} (1 - \frac{\chi(fv)}{N_{f,v}}) = 1 + O(\frac{1}{N_f f}) ,$$

da höchstens n verschiedene Primideale die gleiche Norm besitzen.

Zusammen mit (4.3) folgt die Behauptung (4.4).

Lemma 4.2.

$$(4.5) \quad \frac{N/k}{G(k) f_1(k)} = O(\log \log 3Nk) .$$

Beweis. Sei $\omega(k)$ die Funktion aus (4.2). Man kann sich auf den Fall $\omega(k) \geq 1$ beschränken.

$$(4.6) \quad \text{Nach (2.15) ist} \quad \frac{N/k}{G(k) f_1(k)} = \prod_{f/k} \frac{1}{1 - \frac{\chi(f)}{N_f}} .$$

$$(4.7) \quad \text{Weiter ist} \quad \prod_{f/k} \frac{1}{1 - \frac{\chi(f)}{N_f}} = \prod_{\substack{f/k \\ N_f < \omega(k)}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(f)}{N_f}} \prod_{\substack{f/k \\ N_f \geq \omega(k)}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(f)}{N_f}} .$$

$$\text{Es ist} \quad \prod_{\substack{N_f \geq \omega(k) \\ f/k}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(f)}{N_f}} = O(1), \quad \text{denn} \quad \frac{1}{1 - \frac{\chi(f)}{N_f}} = 1 + \frac{\chi(f)}{N_f - \chi(f)}$$

$$\text{und} \quad \sum_{\substack{N_f \geq \omega(k) \\ f/k}} \frac{\chi(f)}{N_f - \chi(f)} = c_5 \sum_{\substack{f/k \\ N_f \geq \omega(k)}} \frac{1}{N_f} \leq \frac{c_5}{\omega(k)} \sum_{f/k} 1 = \frac{c_5}{5} \cdot c_5 =$$

Es ist nach (4.3) und (4.2):

$$\prod_{\substack{p < \omega(k) \\ p \nmid k}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N_f(p)}} = O\left(\frac{1}{\prod_{p < \omega(k)} (2\omega(p))}\right) = O(\log 2\omega(k)) = O(\log \log 3N_k)$$

Damit folgt aus (4.6) und (4.7) die Behauptung (4.5).

Folgerungen aus (4.3), (4.4), (4.5) sind:

Lemma 4.3. Für $z \geq 2$, $\log N_k \leq \frac{z}{\log z}$ gilt

$$\prod_k(z) = O\left(\frac{\log \log 3N_k}{\log z}\right).$$

Korollar 4.3. Für $\varphi \geq 1$, $\log N_k \leq \frac{N_{f\varphi}}{\log N_{f\varphi}}$ gilt

$$\prod_k^*(\varphi) = O\left(\frac{\log \log 3N_k}{\log N_{f\varphi}}\right).$$

5. In diesem Paragraphen soll eine Asymptotik für $\sum_{Na \leq x} \frac{G(a)}{Na}$ hergeleitet werden. (Man vergleiche dazu [1], Seite 147.)

Lemma 5.1. Für $x \geq 1$ gilt

$$(5.1) \quad \sum_{Na \leq x} G(a) = \frac{\alpha_K}{C(F)} x + O(x^{1-\varepsilon}), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \varepsilon(K, F).$$

Beweis. Es mögen die Bezeichnungen aus dem Beweis zu Lemma 3.1 gelten

Es ist

$$(5.2) \quad \sum_a \frac{G(a)}{Na^s} = \prod_f \frac{1}{1 - \frac{\chi(f)}{Nf^s}} \quad \text{für } s > 1,$$

denn aus der absoluten Konvergenz des Produktes ergibt sich die Konvergenz der Summe, und damit obige Gleichheit.

Weiter ist

$$(5.3) \quad \prod_f \frac{1}{1 - \frac{\chi(f)}{Nf^s}} = \prod_f \frac{(1 - \frac{1}{Nf^s})^{\chi(f)}}{1 - \frac{\chi(f)}{Nf^s}} \cdot \prod_{f \neq \theta \theta^*} \frac{1}{(1 - \frac{1}{Nf^s})^{\chi(f)}} \cdot \prod_{f/\theta \theta^*} \frac{1}{(1 - \frac{1}{Nf^s})^{\chi(f)}}.$$

Es werden die Produkte der rechten Seite betrachtet.

$$(5.4) \quad \prod_f \frac{(1 - \frac{1}{Nf^s})^{\chi(f)}}{1 - \frac{\chi(f)}{Nf^s}} \quad \text{ist absolut konvergent für } s > \frac{1}{2}, \text{ denn:}$$

$$(1 - \frac{1}{Nf^s})^{\chi(f)} = 1 - \frac{\chi(f)}{Nf^s} + O(\frac{1}{Nf^{2s}}),$$

$$(1 - \frac{\chi(f)}{Nf^s})^{-1} = 1 + \frac{\chi(f)}{Nf^s} + O(\frac{1}{Nf^{2s}}),$$

$$\text{also} \quad \frac{(1 - \frac{1}{Nf^s})^{\chi(f)}}{1 - \frac{\chi(f)}{Nf^s}} = 1 + O(\frac{1}{Nf^{2s}}).$$

Daraus folgt (5.4).

Es gilt:

$$(5.5) \quad \prod_{p \times \theta \nmid f} \frac{1}{(1 - \frac{1}{N_f^s})^{\delta(p)}} = \zeta_E(s) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta(m)}{m^s} \quad \text{für } s > 1,$$

wobei $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta(m)}{m^s}$ absolut konvergent ist für $s > \frac{1}{2}$.

Beweis zu (5.5):

$$\zeta_E(s) \prod_{\sigma_1} \frac{1}{1 - \frac{1}{N_E \sigma_1^s}} = \prod_{\substack{N_{E,K} \sigma_1 = p \\ p \times \theta \nmid f}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N_E \sigma_1^s}} \cdot \prod_{\substack{N_{E,K} \sigma_1 = p \\ p / \theta \nmid f}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N_E \sigma_1^s}} \cdot \prod_{\substack{N_{E,K} \sigma_1 = p^k \\ k \geq 2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N_E \sigma_1^s}}$$

Nach (3.1) gilt:

$$\prod_{\substack{N_{E,K} \sigma_1 = p \\ p \times \theta \nmid f}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N_E \sigma_1^s}} = \prod_{p \times \theta \nmid f} \frac{1}{(1 - \frac{1}{N_f^s})^{\delta(p)}}.$$

Da ferner $\prod_{\substack{N_{E,K} \sigma_1 = p \\ p / \theta \nmid f}} (1 - \frac{1}{N_E \sigma_1^s}) \cdot \prod_{\substack{N_{E,K} \sigma_1 = p^k \\ k \geq 2}} (1 - \frac{1}{N_E \sigma_1^s})$

absolut konvergent ist für $s > \frac{1}{2}$, folgt (5.5).

Aus (5.2), (5.3), (5.4) und (5.5) ergibt sich:

$$(5.6) \quad \sum_{\sigma} \frac{G(\sigma)}{N \sigma^s} = \zeta_E(s) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta(m)}{m^s} \quad \text{für } s > 1,$$

wobei $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta(m)}{m^s}$ absolut konvergent ist für $s > \frac{1}{2}$.

Sei $T(d) := |\{ \sigma' \in E / N_E \sigma' = d \}|$.

Dann liefert (5.6): $\sum_{N \sigma \leq X} G(\sigma) = \sum_{m \leq X} \delta(m) \sum_{d \leq \frac{X}{m}} T(d).$

Es gilt: $\sum_{d \leq x} T(d) = \alpha_E x + O(x^{1-\frac{1}{ng+1}})$, wobei α_E das Residuum von

$\zeta_E(s)$ ist. Also folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N \sigma \leq x \\ N \sigma \neq x}} G(\sigma) &= \sum_{m \leq x} \delta(m) \left\{ \alpha_E \frac{x}{m} + O\left(\left(\frac{x}{m}\right)^{1-\frac{1}{ng+1}}\right) \right\} \\ &= \alpha_E x \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta(m)}{m} - \alpha_E x \sum_{m > x} \frac{\delta(m)}{m} + O\left(x^{1-\frac{1}{ng+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\delta(m)|}{m^{1-\frac{1}{ng+1}}}\right). \end{aligned}$$

Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ist

$$\left| \sum_{m > x} \frac{\delta(m)}{m} \right| \leq \sum_{m > x} \frac{|\delta(m)|}{m} \leq \frac{1}{x^\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\delta(m)|}{m^{1-\varepsilon}},$$

und somit folgt für $ng \geq 2$:

$$(5.7) \quad \sum_{\substack{N \sigma \leq x \\ N \sigma \neq x}} G(\sigma) = D_2 x + O(x^{1-\varepsilon}) \quad \text{mit } D_2 := \alpha_E \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta(m)}{m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{ng+1}.$$

Für $ng = 1$ ist $\gamma(p) = 1$ für alle bis auf endlich viele $p_\nu, \nu = 1, \dots, N$, für die $\gamma^*(p_\nu) = 0$ ist. Mit (5.2) folgt:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{G(m)}{m^s} = \zeta(s) \prod_{\nu=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_\nu^s}\right) = \zeta(s) \sum_{m=1}^M \frac{\delta(m)}{m^s}.$$

(5.8) Also gilt (5.7) auch für $ng = 1$

$$\text{mit } D_2 := \sum_{m=1}^M \frac{\delta(m)}{m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Es soll nun die Konstante D_2 bestimmt werden.

$$\text{Es ist } D_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{N\alpha \leq x} G(\alpha)}{x} = \lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1) \sum_{\alpha} \frac{G(\alpha)}{N\alpha^s}.$$

Wegen $\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1) \sum_K(s) = \alpha_K$, folgt:

$$D_2 = \lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\alpha_K}{\sum_K(s)} \sum_{\alpha} \frac{G(\alpha)}{N\alpha^s} = \alpha_K \lim_{s \rightarrow 1^+} \prod_f \left(\frac{1 - \frac{1}{N_f^s}}{1 - \frac{1}{N_f^s}} \right).$$

Mit (3.8) und (3.10) ergibt sich daraus: $D_2 = \frac{\alpha_K}{C(F)}$.

Aus (5.7) und (5.8) folgt damit die Behauptung (5.1).

Lemma 5.2. Für $x \geq 1$ gilt

$$(5.9) \quad \sum_{N\alpha \leq x} \frac{G(\alpha)}{N\alpha} = \frac{\alpha_K}{C(F)} \log x + O(1).$$

Beweis. Partielle Summation ergibt mit (5.1):

$$\begin{aligned} \sum_{N\alpha \leq x} \frac{G(\alpha)}{N\alpha} &= \sum_{N\alpha \leq x} G(\alpha) \cdot \frac{1}{x} + \int_2^x \sum_{N\alpha \leq u} G(\alpha) \cdot \frac{1}{u^2} du \\ &= O(1) + \int_2^x \left[\frac{\alpha_K}{C(F)} u + O(u^{1-\varepsilon}) \right] \frac{1}{u^2} du \end{aligned}$$

Daraus folgt (5.9).

Lemma 5.3. Für $x \geq 1$ und alle ganzen Ideale $\mathfrak{k}$ aus K gilt

$$(5.10) \quad \sum_{\substack{N\alpha \leq x \\ (\alpha, \mathfrak{k})=1}} \frac{G(\alpha)}{N\alpha} = \frac{\alpha_K}{C(F)} \frac{f_1(\mathfrak{k})G(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} \log x + O((\log \log 3N\mathfrak{k})^2)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N\alpha \leq x \\ (\alpha, \mathfrak{k})=1}} \frac{G(\alpha)}{N\alpha} &= \sum_{N\alpha \leq x} \frac{G(\alpha)}{N\alpha} \sum_{\mathfrak{A} | (\alpha, \mathfrak{k})} \mu(\mathfrak{A}) = \sum_{\mathfrak{A} | \mathfrak{k}} \frac{G(\mathfrak{A}) \mu(\mathfrak{A})}{N\mathfrak{A}} \sum_{\substack{N\alpha \leq x \\ \mathfrak{A} | \alpha}} \frac{G(\alpha)}{N\alpha} \\ &= \sum_{\mathfrak{A} | \mathfrak{k}} \frac{G(\mathfrak{A}) \mu(\mathfrak{A})}{N\mathfrak{A}} \left\{ \frac{\alpha_K}{C(F)} \log \frac{x}{N\mathfrak{A}} + R(x, \mathfrak{A}) \right\}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt mit (5.9), wobei

$$R(x, \mathfrak{A}) := \begin{cases} O(1), & \text{falls } \frac{x}{N\mathfrak{A}} \geq 1 \\ \frac{\alpha_K}{C(F)} \log \frac{N\mathfrak{A}}{x}, & \text{falls } \frac{x}{N\mathfrak{A}} < 1 \end{cases}$$

Nach (2.17) und (2.15) ist

$$\sum_{\mathfrak{A} | \mathfrak{k}} \frac{G(\mathfrak{A}) \mu(\mathfrak{A})}{N\mathfrak{A}} = \frac{f_1(\mathfrak{k})G(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} = \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{k}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} \right).$$

Damit ergibt sich weiter:

$$(5.11) \quad \sum_{\substack{N\alpha \leq x \\ (\alpha, \mathfrak{k})=1}} \frac{G(\alpha)}{N\alpha} = \frac{\alpha_K}{C(F)} \frac{f_1(\mathfrak{k})G(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} \log x + O\left(\sum_{\mathfrak{A} | \mathfrak{k}} \frac{\mu^2(\mathfrak{A})G(\mathfrak{A})}{N\mathfrak{A}} \log \frac{x}{N\mathfrak{A}} \right) + O(1).$$

Nun wird das Restglied behandelt:

$$\sum_{\mathfrak{A} | \mathfrak{k}} \frac{\mu^2(\mathfrak{A})G(\mathfrak{A})}{N\mathfrak{A}} \log N\mathfrak{A} = \sum_{\mathfrak{A} | \mathfrak{k}} \frac{\mu^2(\mathfrak{A})G(\mathfrak{A})}{N\mathfrak{A}} \sum_{\mathfrak{p} | \mathfrak{A}} \log N\mathfrak{p} =$$

$$= \sum_{\mathfrak{p}/k} \log N_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N_{\mathfrak{p}}} \sum_{\substack{A/k \\ (A, \mathfrak{p})=1}} \frac{\mu^2(A)G(A)}{NA} \leq \sum_{\mathfrak{p}/k} \log N_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N_{\mathfrak{p}}} \sum_{A/k} \frac{\mu^2(A)G(A)}{NA}.$$

Die beiden rechten Summen der letzten Zeile werden jeweils zu $O(\log \log 3Nk)$, denn:

$$\sum_{\mathfrak{p}/k} \log N_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N_{\mathfrak{p}}} = O\left(\sum_{\mathfrak{p}/k} \frac{\log N_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}}\right) = O\left(\sum_{v=1}^{\omega(k)} \frac{\log N_{\mathfrak{p}_v}}{N_{\mathfrak{p}_v}}\right) = O\left(\sum_{N_{\mathfrak{p}} \leq N_{\mathfrak{p}_{\omega(k)}}} \frac{\log N_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}}\right).$$

Aus (3.2) folgt mit $\omega = \omega(k)$: $N_{\mathfrak{p}_{\omega}} \leq c_6 \omega^2$, $c_6 = c_6(K)$.

Mit (3.6) und (4.2) ergibt sich daraus:

$$O\left(\sum_{N_{\mathfrak{p}} \leq N_{\mathfrak{p}_{\omega}}} \frac{\log N_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}}\right) = O\left(\sum_{N_{\mathfrak{p}} \leq c_6 \omega^2} \frac{\log N_{\mathfrak{p}}}{N_{\mathfrak{p}}}\right) = O(\log \omega) = O(\log \log 3Nk).$$

Aus (4.5) und (4.6) folgt:

$$\sum_{A/k} \frac{\mu^2(A)G(A)}{NA} = \prod_{\mathfrak{p}/k} \left(1 + \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N_{\mathfrak{p}}}\right) = O\left(\prod_{\mathfrak{p}/k} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N_{\mathfrak{p}}}\right)^{-1}\right) = O(\log \log 3Nk).$$

Damit ergibt sich aus (5.11) die Behauptung (5.10).

Lemma 5.4. Für $x \geq 1$ und alle ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ aus K gilt

$$(5.12) \quad \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ (\mathfrak{a}, k)=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = \frac{\alpha_K}{C(F)} \frac{\prod_{\mathfrak{p}/k} \left(1 - \frac{G(\mathfrak{p}^2)}{N_{\mathfrak{p}}^2}\right)}{\prod_{\mathfrak{p}/k} \left(1 + \frac{G(\mathfrak{p})}{N_{\mathfrak{p}}}\right)} \log x + O((\log \log 3Nk)).$$

Beweis.

$$\sum_{\substack{N\sigma \leq x \\ (\sigma, k)=1}} \frac{\mu^2(\sigma)G(\sigma)}{N\sigma} = \sum_{\substack{N\sigma \leq x \\ (\sigma, k)=1}} \frac{G(\sigma)}{N\sigma} \sum_{\substack{l^2 \leq \sigma \\ \sigma}} \mu(l) = \sum_{\substack{Nl \leq \sqrt{x} \\ (l, k)=1}} \frac{\mu(l)G(l^2)}{Nl^2} \sum_{\substack{Nl \leq \frac{x}{Nl^2} \\ (l, k)=1}} \frac{G(l)}{Nl}$$

Mit Lemma 5.3 folgt:

$$\sum_{\substack{N\sigma \leq x \\ (\sigma, k)=1}} \frac{\mu^2(\sigma)G(\sigma)}{N\sigma} = \frac{\alpha_k}{C(F)} \frac{f_1(k)G(k)}{Nk} \log x \sum_{\substack{(l, k)=1 \\ Nl^2 \leq x}} \frac{\mu(l)G(l^2)}{Nl^2} \quad (a)$$

$$= \frac{\alpha_k}{C(F)} \frac{f_1(k)G(k)}{Nk} \log x \sum_{\substack{(l, k)=1 \\ Nl^2 > \sqrt{x}}} \frac{\mu(l)G(l^2)}{Nl^2} \quad (b)$$

$$= \frac{\alpha_k}{C(F)} \frac{f_1(k)G(k)}{Nk} \sum_{\substack{Nl \leq \sqrt{x} \\ (l, k)=1}} \frac{\mu(l)G(l^2)}{Nl^2} \log Nl^2 \quad (c)$$

$$+ O((\log \log 3Nk)^2) \cdot \sum_{\substack{Nl \leq \sqrt{x} \\ (l, k)=1}} \frac{\mu(l)G(l^2)}{Nl^2} \quad (d)$$

Mit (2.15) folgt:

$$\frac{f_1(k)G(k)}{Nk} \sum_{\substack{(l, k)=1 \\ Nl^2 \leq x}} \frac{\mu(l)G(l^2)}{Nl^2} = \prod_p (1 - \frac{G(p^2)}{Np^2}) \prod_{p|k} (1 + \frac{G(p)}{Np})$$

Damit wird Zeile (a) zum Hauptglied in (5.12).

Für $\mu^2(l) = 1$ ist $G(l^2) \leq e^{2\omega(l)} \leq e^{2c_F \frac{\log Nl}{\log \log 3Nl}}$, also

$$(5.13) \quad G(l^2) \leq c_F Nl^\varepsilon \quad \text{für } \varepsilon > 0, \quad c_F = c_F(K, F, \varepsilon).$$

Damit wird, wegen $\frac{f_1(k)G(k)}{Nk} = O(1)$, Zeile (b) zu $O(1)$, Zeile (c)

zu $O(1)$ und Zeile (d) zu $O((\log \log 3Nk)^2)$.

Es folgt (5.12).

Sei $\mathcal{V}_i = \prod_{\mathfrak{p}|\mathcal{V}_i} \mathfrak{p}^{k_{i\mathfrak{p}}}$ für $i = 1, 2$,

und sei $[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2] := \prod_{\mathfrak{p}|\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \mathfrak{p}^{\max(k_{1\mathfrak{p}}, k_{2\mathfrak{p}})}$, $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) := \prod_{\mathfrak{p}|\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \mathfrak{p}^{\min(k_{1\mathfrak{p}}, k_{2\mathfrak{p}})}$.

Lemma 5.5. Für $t \geq 1$, $\mathfrak{g} \geq 0$ gilt

$$(5.14) \quad \sum_{\substack{N\mathcal{V}_i \leq t \\ \mathcal{V}_i/P_{\mathfrak{K}}^*(\mathfrak{g}) \\ i=1,2}} \frac{G([\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2])}{N[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]} = 0 \left\{ \left[\min(\log t, \log N_{\mathfrak{p}}) + 1 \right]^3 \right\}.$$

Beweis. Wegen $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ und (2.18) ist

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N\mathcal{V}_i \leq t \\ \mathcal{V}_i/P_{\mathfrak{K}}^*(\mathfrak{g}) \\ i=1,2}} \frac{G([\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2])}{N[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]} &= \sum_{\substack{N\mathcal{V}_i \leq t \\ \mathcal{V}_i/P_{\mathfrak{K}}^*(\mathfrak{g}) \\ i=1,2}} \frac{G(\mathcal{V}_1)G(\mathcal{V}_2)}{N\mathcal{V}_1 N\mathcal{V}_2} \frac{N(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)}{G([\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2])} = \\ &= \sum_{\substack{N\mathcal{V}_i \leq t \\ \mathcal{V}_i/P_{\mathfrak{K}}^*(\mathfrak{g}) \\ i=1,2}} \frac{G(\mathcal{V}_1)G(\mathcal{V}_2)}{N\mathcal{V}_1 N\mathcal{V}_2} \sum_{\mathfrak{a}/(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)} f_1(\mathfrak{a}) \\ (5.15) \quad &= \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq t \\ \mathfrak{a}/P_{\mathfrak{K}}^*(\mathfrak{g})}} \frac{f_1(\mathfrak{a})G^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^2} \left\{ \sum_{\substack{N\mathfrak{c} \leq \frac{t}{N\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{c}/P_{\mathfrak{K}}^*(\mathfrak{g})}} \frac{G(\mathfrak{c})}{N\mathfrak{c}} \right\}^2. \end{aligned}$$

Mit (5.9) und $\frac{f_1(\mathfrak{a})G(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = O(1)$ folgt daraus:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{N\mathcal{J}_i \leq t \\ \mathcal{J}_i/P_k^*(\varrho) \\ i=1,2}} \frac{G([\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2])}{N[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2]} &= O \left\{ \sum_{N\sigma \leq t} \frac{G(\sigma)}{N\sigma} \left[\frac{\chi_k}{G(F)} \log \frac{t}{N\sigma} + O(1) \right]^2 \right\} \\
 &= O \left\{ [\log t + 1] [\log t + 1]^2 \right\} \\
 (5.16) \qquad &= O \left\{ [\log t + 1]^3 \right\}.
 \end{aligned}$$

Andererseits ist für $\varrho \geq 1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{N\mathcal{C} \leq \tau \\ \mathcal{C}/P_6^*(\varrho)}} \frac{G(\mathcal{C})}{N\mathcal{C}} &\leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \varrho_\nu \neq b}}^{\varrho} \left(1 + \frac{\chi(\varrho_\nu)}{N\varrho_\nu} \right) \leq \prod_{\nu=1}^{\varrho} \left(1 + \frac{\chi(\varrho_\nu)}{N\varrho_\nu} \right)^{-1} = \frac{1}{I_1^*(\varrho)} \\
 &= O(\log N\varrho_\varrho).
 \end{aligned}$$

Dies ergibt mit (5.15):

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{N\mathcal{J}_i \leq t \\ \mathcal{J}_i/P_k^*(\varrho) \\ i=1,2}} \frac{G([\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2])}{N[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2]} &= O \left\{ \sum_{\substack{N\sigma \leq t \\ \sigma/P_k^*(\varrho)}} \frac{G(\sigma)}{N\sigma} (\log N\varrho_\varrho)^\wedge \right\} \\
 &= O \left\{ (\log N\varrho_\varrho)^3 \right\}.
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch den Fall $\varrho = 0$, so folgt mit (5.16) die Behauptung (5.14).

6. Es wird die Funktion $\frac{1}{f_1(\alpha)}$ betrachtet.

Lemma 6.1. Für $x \geq 2$ gilt

$$(6.1) \quad \sum_{N_{\mathfrak{p}} \leq x} \frac{1}{f_1(\mathfrak{p})} = \log \log x + D_3 + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Dabei ist D_3 eine von K und $F(x)$ abhängige Konstante.

Beweis. Nach (2.15) ist

$$\sum_{N_{\mathfrak{p}} \leq x} \frac{1}{f_1(\mathfrak{p})} = \sum_{N_{\mathfrak{p}} \leq x} \frac{\delta^*(\mathfrak{p})}{N_{\mathfrak{p}} - \delta^*(\mathfrak{p})} = \sum_{N_{\mathfrak{p}} \leq x} \frac{\delta^*(\mathfrak{p})}{N_{\mathfrak{p}}} + D_4 - \sum_{N_{\mathfrak{p}} > x} \frac{\delta^2(\mathfrak{p})}{(N_{\mathfrak{p}} - \delta^*(\mathfrak{p}))}.$$

$$\text{mit } D_4 := \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\delta^2(\mathfrak{p})}{(N_{\mathfrak{p}} - \delta^*(\mathfrak{p})) N_{\mathfrak{p}}}.$$

Daraus folgt mit (3.4) die Behauptung (6.1); dabei ist $D_3 := D_1 + D_4$.

Lemma 6.2. Für $x \geq 2$ und alle ganzen Ideale $\mathfrak{k}$ aus K gilt

$$(6.2) \quad \sum_{\substack{N_{\alpha} \leq x \\ (\alpha, \mathfrak{k})=1}} \frac{\mu^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} = \frac{\alpha_K}{G(F)} \frac{f_1(\mathfrak{k})G(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} \log x + O((\log \log 3N\mathfrak{k})^2).$$

Beweis.

$$\sum_{\substack{Nq \leq x \\ (n, k)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f_1(n)} = \sum_{\substack{Nq \leq x \\ (n, k)=1}} \frac{\mu^2(n) G(n)}{Nq} \prod_{p|n} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{Nq}} = \sum_{\substack{Nq \leq x \\ (n, k)=1}} \frac{\mu^2(n) G(n)}{Nq} \prod_{p|n} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{Nq}}$$

$$= \sum_{\substack{Nq \leq x \\ (c, k)=1}} \frac{G(c) G(q(c))}{Nc Nq(c)} \sum_{\substack{Nl \leq \frac{x}{Nq(c)} \\ (l, kc)=1}} \frac{\mu^2(l) G(l)}{Nl}$$

Nun wird (5.12) eingesetzt. Bei den weiteren Umformungen ist folgende Gleichung zu beachten:

$$\sum_c \frac{G(c) G(q(c))}{Nc Nq(c)} = \sum_c \frac{G^2(q(c))}{N_1(c)^2} \mu^2(c) \sum_{G|c} \frac{G}{Nc} = \sum_c \frac{G^2(q(c))}{N_1(c)^2} \mu^2(c) \prod_{p|c} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{Nq(c)}}$$

Ferner gelten wegen (5.13) die Abschätzungen:

$$\sum_{\substack{Nq(c) > x \\ (c, k)=1}} \frac{G(c) G(q(c))}{Nc Nq(c)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{und}$$

$$\sum_{\substack{Nq(c) \leq x \\ (c, k)=1}} \frac{G(c) G(q(c))}{Nc Nq(c)} \log Nc = O(1)$$

Damit folgt dann (6.2).

Lemma 6.2 und Lemma 5.4 lassen sich für $k=1$ mit den Überlegungen aus dem Beweis zu Lemma 5.1 auch direkt herleiten.

7. In den Paragraphen 2 bis 6 sind die notwendigen Hilfssätze bereitgestellt worden, um die weitere Rechnung analog wie bei Senaal [7] fortzuführen.

Definiert man für $\varphi \geq 0$, $x \geq 1$

$$(7.1) \quad S_K^*(x, \varphi) := \sum_{\substack{N\alpha \leq x \\ \alpha/P_K^*(\varphi)}} \frac{1}{f_1(\alpha)},$$

so lassen sich alle Sätze aus [7] entsprechend übertragen, indem man die Funktionen wie folgt ersetzt:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) & \text{ durch } f_1(\alpha), \\ S_K(x, \varphi) & \text{ durch } S_K^*(x, \varphi), \\ R_K(\varphi) & \text{ durch } \Gamma_K^1(\varphi), \\ \frac{1}{N\alpha} & \text{ durch } \frac{G(\alpha)}{N\alpha}. \end{aligned}$$

Ferner ersetze man wegen der größeren Allgemeinheit y durch h .

Die Einführung von $G(\alpha)$ bot sich an wegen der Identität (5.2).

Die analytischen Hilfsfunktionen aus [7] können unverändert übernommen werden. Speziell auch die Funktionen $\Lambda(u)$ und $\lambda(u)$, die die folgenden Eigenschaften haben:

$$(7.2) \quad \begin{cases} \Lambda(u) & \text{fällt monoton gegen 1,} \\ \lambda(u) & \text{wächst monoton gegen 1.} \end{cases}$$

Definiert man für $t > 1$, $\varphi \geq 0$ und ganze Ideale $\mathfrak{a}$ aus K

$$(7.3) \quad \lambda_{\mathfrak{a}} := \frac{\mu(\mathfrak{a}) N_{\mathfrak{a}}^t S_{K\mathfrak{a}}^*\left(\frac{t}{N_{\mathfrak{a}}}, \varphi\right)}{f_1(\mathfrak{a}) G(\mathfrak{a}) G_K^*(t, \varphi)},$$

so ergibt sich:

$$(7.4) \quad \lambda_1 = 1,$$

$$(7.5) \quad \text{und für } \mathcal{V}/P_k^*(\varphi) \text{ ist } |\lambda_{\mathcal{V}}| \leq \mu^2(\mathcal{V}).$$

Beweis zu (7.5):

$$\begin{aligned} S_{k\varphi}^*(t, \varphi) &= \sum_{\substack{Na \leq t \\ a/P_k^*(\varphi)}} \frac{1}{f_1(a)} = \sum_{A/\mathcal{V}} \sum_{\substack{Na \leq t \\ a/P_k^*(\varphi) \\ (a, \mathcal{V})=A}} \frac{1}{f_1(a)} = \\ &= \sum_{\substack{A/\mathcal{V} \\ A/P_k^*(\varphi)}} \frac{1}{f_1(A)} \sum_{\substack{Na \leq \frac{t}{NA} \\ c, \frac{t}{NA} \in \mathbb{N} \\ c, \frac{t}{NA} \in \mathbb{N}}} \frac{1}{f_1(c)} = \sum_{A/\mathcal{V}} \frac{1}{f_1(A)} S_{k\mathcal{V}}^*\left(\frac{t}{NA}, \varphi\right) \\ &= S_{k\mathcal{V}}^*\left(\frac{t}{N\mathcal{V}}, \varphi\right) \sum_{A/\mathcal{V}} \frac{1}{f_1(A)} = S_{k\mathcal{V}}^*\left(\frac{t}{N\mathcal{V}}, \varphi\right) \sum_{A/\mathcal{V}} \frac{1}{f_1(A)} = \\ &= S_{k\mathcal{V}}^*\left(\frac{t}{N\mathcal{V}}, \varphi\right) \frac{N^2}{G(\mathcal{V}) f_1(\mathcal{V})}, \end{aligned}$$

nach (..17).

Mit (7.3) folgt daraus die Behauptung (7.5).

Weiter ist für $\varphi \geq 0$, $NA \leq t$

$$\sum_{\substack{a \leq \frac{t}{NA} \\ a/P_k^*(\varphi)}} \frac{\lambda_{\mathcal{V}} G(\mathcal{V})}{N^2} = \frac{\mu(A)}{f_1(A) S_{k\mathcal{V}}^*\left(\frac{t}{NA}, \varphi\right)}.$$

Beweis zu (7.6): Nach (7.3) und (7.1) ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\mathcal{A}/\mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\mathcal{B}^*}} \frac{\lambda \mathcal{G}(\mathcal{A})}{N \mathcal{B}^*} &= \sum_{\substack{\mathcal{A}/\mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\mathcal{B}^*}} \frac{\mu(\mathcal{A})}{f_1(\mathcal{A})} \frac{S_{k\mathcal{B}}^*(N\mathcal{B}^*, \mathcal{G})}{S_k^*(t, \mathcal{G})} \\
 &= \frac{1}{S_k^*(t, \mathcal{G})} \sum_{\substack{\mathcal{A}/\mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\mathcal{B}^*}} \frac{\mu(\mathcal{A})}{f_1(\mathcal{A})} \sum_{\substack{N\mathcal{A} \leq \frac{t}{N\mathcal{B}^*} \\ \mathcal{A}/\mathcal{B}_{k\mathcal{B}^*}(\mathcal{G})}} \frac{\mu^2(\mathcal{A})}{f_1(\mathcal{A})} \\
 &= \frac{\mu(1)}{f_1(1) S_k^*(t, \mathcal{G})} \sum_{\mathcal{A}/\mathcal{B}_{k4}^*(\mathcal{G})} \frac{\mu(\mathcal{A})}{f_1(\mathcal{A})} \sum_{\substack{N\mathcal{A} \leq \frac{t}{N\mathcal{B}^*} \\ \mathcal{A}/\mathcal{B}_{k4}^*(\mathcal{G})}} \frac{\mu^2(\mathcal{A})}{f_1(\mathcal{A})} \\
 &= \frac{\mu(1)}{f_1(1) S_k^*(t, \mathcal{G})} \sum_{\substack{N\mathcal{B} \leq \frac{t}{N\mathcal{B}^*} \\ \mathcal{B}/\mathcal{B}_{k4}^*(\mathcal{G})}} \frac{\mu(\mathcal{B})}{f_1(\mathcal{B})} \sum_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} \mu(\mathcal{A}) = \frac{\mu(1)}{f_1(1) S_k^*(t, \mathcal{G})} .
 \end{aligned}$$

Damit ist (7.6) gezeigt.

Nun kann man eine erste obere Abschätzung für $A_k^*(M_n, \mathcal{G})$ herleiten.
Zunächst ist wegen (7.4) und (7.5) :

$$\begin{aligned}
 A_k^*(M_n, \mathcal{G}) &= \sum_{\substack{\xi \in M_n \\ (\xi, \mathcal{B}_k^*(\mathcal{G}))=1}} 1 \leq \sum_{\xi \in M_n} \left\{ \sum_{\mathcal{B}/(\xi, \mathcal{B}_k^*(\mathcal{G}))} \lambda \mathcal{B} \right\}^2 \\
 &\leq \sum_{\substack{\mathcal{B} \in \mathcal{B}_k^*(\mathcal{G}) \\ i=1,2}} \lambda \mathcal{B}_1 \lambda \mathcal{B}_2 |M_n[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2]|
 \end{aligned}$$

Nach (2.10) ist

$$|N_{\alpha}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)| = \gamma(\alpha) [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2] \cdot \left\{ \frac{h}{N_{\alpha} N[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]} + O\left[\left(\frac{h}{N_{\alpha} N[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} + 1\right] \right\}$$

Das ergibt

$$(7.7) \quad A_R^*(M_{\alpha}, \varphi) \leq B h \frac{\gamma(\alpha)}{N_{\alpha}} \sum_{\substack{\tilde{v}_i \in P_R^*(\varphi) \\ i=1,2}} \frac{\lambda_{\tilde{v}_1} \lambda_{\tilde{v}_2} G([\tilde{v}_1, \tilde{v}_2])}{N[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]} + O\left\{ \gamma(\alpha) \sum_{\substack{\tilde{v}_i \in P_R^*(\varphi) \\ i=1,2}} |\lambda_{\tilde{v}_1} \lambda_{\tilde{v}_2}| G([\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]) \left[\left(\frac{h}{N_{\alpha} N[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]} \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} + 1 \right] \right\}$$

Es wird das Hauptglied aus (7.7) betrachtet.

$$\sum_{\substack{\tilde{v}_i \in P_R^*(\varphi) \\ i=1,2}} \frac{\lambda_{\tilde{v}_1} \lambda_{\tilde{v}_2} G([\tilde{v}_1, \tilde{v}_2])}{N[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]} = \sum_{\substack{\tilde{v}_i \in P_R^*(\varphi) \\ i=1,2}} \frac{\lambda_{\tilde{v}_1} \lambda_{\tilde{v}_2} G(\tilde{v}_1) G(\tilde{v}_2)}{N_{\tilde{v}_1} N_{\tilde{v}_2}} \sum_{\substack{\tilde{v}_i \in P_R^*(\varphi) \\ i=1,2}} \frac{1}{N[\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]} \\ = \sum_{\tilde{v} \in P_R^*(\varphi)} c_1(\tilde{v}) \left[\sum_{\substack{\tilde{v}' \in P_R^*(\varphi) \\ \tilde{v}' \neq \tilde{v}}} \frac{\lambda_{\tilde{v}'} G(\tilde{v}')}{N_{\tilde{v}'}} \right]^2.$$

$$\text{Es ist } \left[\sum_{\substack{\tilde{v}' \in P_R^*(\varphi) \\ \tilde{v}' \neq \tilde{v}}} \frac{\lambda_{\tilde{v}'} G(\tilde{v}')}{N_{\tilde{v}'}} \right]^2 = 0, \quad \text{falls } N_{\tilde{v}} > t, \text{ denn } N_{\tilde{v}} > t \text{ und}$$

$\tilde{v} \neq \tilde{v}'$ bedingt $N_{\tilde{v}'} > t$, und daraus folgt mit (7.3) $\lambda_{\tilde{v}'} = 0$.

Also gilt weiter mit (7.6):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{\mathcal{C}/P_k^*(\mathcal{G}) \\ N\mathcal{C} \leq t}} f_1(\mathcal{C}) \left[\sum_{\substack{\mathcal{J}/P_k^*(\mathcal{G}) \\ \mathcal{C}/\mathcal{J}}} \frac{\lambda_{\mathcal{J}} G(\mathcal{J})}{N\mathcal{J}} \right]^2 = \sum_{\substack{\mathcal{C}/P_k^*(\mathcal{G}) \\ N\mathcal{C} \leq t}} f_1(\mathcal{C}) \left[\sum_{\substack{\mathcal{J}/P_k^*(\mathcal{G}) \\ \mathcal{C}/\mathcal{J}}} \frac{\lambda_{\mathcal{J}} G(\mathcal{J})}{N\mathcal{J}} \right]^2 \\
 & = \sum_{\substack{\mathcal{C}/P_k^*(\mathcal{G}) \\ N\mathcal{C} \leq t}} f_1(\mathcal{C}) \frac{\mu^2(\mathcal{C})}{f_1(\mathcal{C}) S_k^{*2}(t, \mathcal{G})} = \frac{1}{S_k^{*2}(t, \mathcal{G})} \sum_{\substack{\mathcal{C}/P_k^*(\mathcal{G}) \\ N\mathcal{C} \leq t}} \frac{\mu^2(\mathcal{C})}{f_1(\mathcal{C})} \\
 (7.8) \quad & = \frac{1}{S_k^*(t, \mathcal{G})} .
 \end{aligned}$$

Nun wird das Restglied aus (7.7) abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
 i) \quad & \sum_{\substack{i=1,2 \\ \mathcal{J}_i/P_k^*(\mathcal{G}) \\ N\mathcal{J}_i \leq t}} |\lambda_{\mathcal{J}_1} \lambda_{\mathcal{J}_2}| G([\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2]) \left(\frac{1}{N[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2]} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
 & = 0 \left\{ \sum_{\substack{i=1,2 \\ \mathcal{J}_i/P_k^*(\mathcal{G}) \\ N\mathcal{J}_i \leq t}} |\lambda_{\mathcal{J}_1}| |\lambda_{\mathcal{J}_2}| G(\mathcal{J}_1)^{\frac{1}{n}} G(\mathcal{J}_2)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{G([\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2])}{N[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2]} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right\} ,
 \end{aligned}$$

das ist nach der Hölderschen Ungleichung:

$$= 0 \left\{ \left[\sum_{\substack{i=1,2 \\ \mathcal{J}_i/P_k^*(\mathcal{G}) \\ N\mathcal{J}_i \leq t}} (|\lambda_{\mathcal{J}_1}| |\lambda_{\mathcal{J}_2}| G(\mathcal{J}_1)^{\frac{1}{n}} G(\mathcal{J}_2)^{\frac{1}{n}})^n \right]^{\frac{1}{n}} \left[\sum_{\substack{N\mathcal{J}_i \leq t \\ \mathcal{J}_i/P_k^*(\mathcal{G}) \\ i=1,2}} \frac{G([\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2])}{N[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2]} \right]^{\frac{n-1}{n}} \right\}$$

nach (7.5), (5.9), (5.14):

$$\begin{aligned}
 & = 0 \left\{ \left[\sum_{N\mathcal{J} \leq t} \mu^2(\mathcal{J}) G(\mathcal{J}) \right]^{\frac{2}{n}} \left[\min(\log t, \log N_{\mathcal{G}}) + 1 \right]^3 \frac{n-1}{n} \right\} \\
 (7.9) \quad & = 0 \left\{ t^{\frac{2}{n}} \left[\min(\log t, \log N_{\mathcal{G}}) + 1 \right]^3 \frac{n-1}{n} \right\} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \sum_{\substack{\mathcal{J}_i / \mathbb{P}_k^*(\mathcal{S}) \\ i=1,2}} |\lambda_{\mathcal{J}_1} \lambda_{\mathcal{J}_2}| G([\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2]) &= O \left\{ \left[\sum_{\substack{N\mathcal{J} \leq t \\ \mathcal{J} / \mathbb{P}_k^*(\mathcal{S})}} |\lambda_{\mathcal{J}}| G(\mathcal{J}) \right]^2 \right\} \\
 &= O \left\{ \left[\sum_{N\mathcal{J} \leq t} \omega^2(\mathcal{J}) G(\mathcal{J}) \right]^2 \right\} = O \left\{ \left[\sum_{N\mathcal{J} \leq t} G(\mathcal{J}) \right]^2 \right\} \\
 (7.10) \quad &= O(t^2) .
 \end{aligned}$$

Aus (7.7), (7.8), (7.10) folgt nun die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 A_k^*(M_{\mathcal{A}}, \mathcal{S}) &= B h \frac{\delta(\mathcal{A})}{N\mathcal{A}} \frac{1}{S_k^*(t, \mathcal{S})} + \\
 &O \left\{ \delta(\mathcal{A}) \left(\frac{h}{N\mathcal{A}} \right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{2}{t^{\frac{2}{n}}} \left[\min(\log t, \log N\mathcal{S}) + 1 \right] 3^{\frac{n-1}{n}} \right\} + O \left\{ \delta(\mathcal{A}) \right\}
 \end{aligned}$$

Aufgrung der Identität (2.8) kann man aus oberen Abschätzungen untere gewinnen und umgekehrt.

Folgt man dem Verfahren in [7], so kommt man zu folgenden Resultaten :
 (Man vergleiche dazu [7], Korollar 4.2, Seite 306 und [5], Theorem A und Theorem B, Seite 7.)

Satz 1. Es seien $\Lambda(u)$ und $\lambda(u)$ die Funktionen aus [7], (1.4).

Sei h definiert wie in (2.2), sei $h^* := \frac{h}{N\mathcal{A}}$, $z = h$ und $(\mathcal{A}, \mathbb{P}_k(z)) =$

Dann gilt:

$$(7.11) \quad A_k(M_{\mathcal{A}}, z) \leq B h^* T_k^*(z) \delta(\mathcal{A}) \left\{ \Lambda\left(\frac{\log h^*}{\log z}\right) + O\left(\frac{(\log \log 3Nk)^6}{(\log \log 3 h^*)^7}\right) \right\}$$

$$(7.12) \quad A_k(M_{\mathcal{A}}, z) \geq B h^* T_k^*(z) \delta(\mathcal{A}) \left\{ \lambda\left(\frac{\log h^*}{\log z}\right) - O\left(\frac{(\log \log 3Nk)^6}{(\log \log 3 h^*)^7}\right) \right\}$$

Dabei hängen die O-Konstanten von K und $F(x)$ ab.

Aus diesem Satz läßt sich durch eine Überlegung analog [7], § 5, folgende Erweiterung von (7.11) erreichen:

Für $z \leq h^{*c_g}$ und $(\alpha, p_k(z)) = 1$ gilt

$$(7.13) \quad A_k(M_\alpha, z) \leq B h^* \prod_k(z) \delta(\alpha) \left\{ \prod \left(\frac{\log h^*}{\log z} \right) + O\left(\frac{(\log \log 3N)^6}{(\log \log 3 h^*)^7} \right) \right\}$$

Dabei hängt die O-Konstante von K, F(x) und c_g ab.

8. Aus Satz 1 gewinnt man nun den folgenden

Satz 2. Es sei

$$(8.1) \quad 0 \leq \sigma \leq c_g,$$

$$(8.2) \quad 1 < u < v; \quad b_v \text{ bezeichne Konstanten, die außer von K und } F(x) \text{ noch von u und v abhängen.}$$

$$(8.3) \quad W(M, v, u, \sigma) := \sum_{\substack{\alpha \in M \\ (\alpha, p_k(h^{\frac{1}{v}}))=1}}^* \left\{ 1 - \sigma \sum_{\substack{h^{\frac{1}{v}} \leq Np < h^{\frac{1}{u}} \\ p/\alpha}}' \left(1 - u \frac{\log Np}{\log h} \right) \right\}$$

$$(8.4) \quad \sum^* \text{bedeute, daß nur über } \alpha \text{'s summiert wird, für die gilt:} \\ \alpha \not\equiv 0 \pmod{p^2} \quad \text{für} \quad h^{\frac{1}{v}} \leq Np < h^{\frac{1}{u}}, \quad p \nmid k.$$

Dann gilt:

$$(8.5) \quad w_k(M, v, u, \sigma) \geq B h \prod_k(h^{\frac{1}{v}}) \left[\lambda(v) - \sigma \int_u^v \lambda(v(1 - \frac{1}{t})) (1 - \frac{u}{t}) \frac{dt}{t} \right. \\ \left. - b_1 \frac{(\log \log 3N)^6}{(\log \log 3 h)^7} \right].$$

Beweis. Falls $h \leq H_0$ ist, so kann wegen (7.2) b_1 so groß gewählt werden, daß (8.5) erfüllt ist. Sei also $h > H_0(u, v)$.

Sei $z_1 := h^{\frac{1}{v}}$, $z_2 := h^{\frac{1}{u}}$. Wegen (8.4) folgt:

$$(8.6) \quad W_k(M, v, u, \sigma) \geq A_k(M, z_1) - \sum_{z_1 \leq Np < z_2}' \sum_{\substack{\alpha \in M \\ \alpha \equiv 0 \pmod{p}}} 1 \\ = O \sum_{z_1 \leq Np < z_2}' \left(1 - \frac{\log Np}{\log z_2}\right) A_k(Mp, z_1).$$

Es werden nacheinander die Summanden der rechten Seite abgeschätzt.

i) Aus (7.12) folgt:

$$(8.7) \quad A_k(M, z_1) \geq B h \prod_k(z_1) \left\{ \lambda(v) - O\left(\frac{(\log \log 3Nk)^6}{(\log \log 3h)^7}\right) \right\}.$$

ii) Es ist nach (2.10), (2.13) und (4.3):

$$\sum_{z_1 \leq Np < z_2}' \sum_{\substack{\alpha \in M \\ \alpha \equiv 0 \pmod{p^2}}} 1 \leq \sum_{z_1 \leq Np < z_2} \chi(p^2) \left\{ B \frac{h}{Np^2} + O\left[\left(\frac{1}{Np^2}\right)^{1-\frac{1}{n}} + 1\right] \right\}$$

$$\leq c_{10} \left\{ h \sum_{z_1 \leq Np < z_2} \frac{1}{Np^2} + z_2 \right\} \quad c_{10} = c_{10}(h)$$

$$\leq c_{11} \left\{ \frac{h}{z_1} \log \log z_2 + z_2 \right\} \quad c_{11} = c_{11}(h)$$

$$(8.8) \quad \leq b_2 \frac{h}{\log h} \prod_k(z_1), \quad \text{da } h > H_0(u, v).$$

iii) Aus (7.13) folgt mit $c_8 = \frac{u}{v(u-1)}$:

$$(8.9) \quad \sum_{z_1 \leq N_f < z_2}' \left(1 - \frac{\log N_f}{\log z_2}\right) A_k(M_f, z_1) \leq$$

$$B h \prod_k'(z_1) \left\{ \sum_{z_1 \leq N_f < z_2}' \left(1 - \frac{\log N_f}{\log z_2}\right) \frac{\gamma(f)}{N_f} \wedge \left(\frac{\log \frac{h}{N_f}}{\log z_1}\right) + O\left[b_3 \frac{(\log \log 3Nk)}{(\log \log 3h)}\right] \right\}$$

Man setze für $z_1 \leq w \leq z_2$:

$$D_k(w) := \sum_{z_1 \leq N_f < w}' \left(1 - \frac{\log N_f}{\log z_2}\right) \frac{\gamma(f)}{N_f}, \quad E(w) := \wedge \left(\frac{\log \frac{h}{w}}{\log z_1}\right).$$

Dann folgt mit (3.4) und (3.5):

$$D_k(w) = \log \frac{\log w}{\log z_1} - \frac{\log w}{\log z_2} + \frac{\log z_1}{\log z_2} - \sum_{\substack{z_1 \leq N_f < w \\ f/k}}' \left(1 - \frac{\log N_f}{\log z_2}\right) \frac{\gamma(f)}{N_f} + O\left(\frac{1}{\log z_2}\right).$$

Mit den Überlegungen von Seite 21 ist

$$\sum_{\substack{z_1 \leq N_f < w \\ f/k}}' \frac{\gamma(f)}{N_f} = O\left(\frac{1}{\log z_1} \sum_{\substack{z_1 \leq N_f < w \\ f/k}}' \frac{\log N_f}{N_f}\right) = O\left(\frac{\log \log 3Nk}{\log z_1}\right),$$

und entsprechend $\frac{1}{\log z_2} \sum_{\substack{z_1 \leq N_f < w \\ f/k}}' \frac{\gamma(f)}{N_f} \log N_f = O\left(\frac{\log \log 3Nk}{\log z_2}\right).$

Also folgt

$$(8.10) \quad D_k(w) = \log \frac{\log w}{\log z_1} - \frac{\log w}{\log z_2} + \frac{u}{v} + O(b_4 \frac{\log \log 3Nk}{\log h})$$

Partielle Summation ergibt mit (8.10) und (7.2):

$$\begin{aligned}
 \sum'_{z_1 \leq Nf < z_2} \left(1 - \frac{\log Nf}{\log z_2}\right) \frac{\chi(f)}{Nf} \wedge \left(\frac{\log \frac{h}{Nf}}{\log z_1}\right) \\
 = D_k(z_2) E(z_2) - \int_{z_1}^{z_2} D_k(w) E'(w) dw \\
 = D_k(z_2) E(z_2) - \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \log \frac{\log w}{\log z_1} - \frac{\log w}{\log z_2} + \frac{u}{v} + O\left(b_6 \frac{\log \log 3Nk}{\log^2 h}\right) \right\} \\
 = D_k(z_2) E(z_2) + \log \log z_1 [E(z_2) - E(z_1)] + O\left(b_5 \frac{\log \log 3Nk}{\log h}\right) \\
 - \int_{z_1}^{z_2} \left(\log \log w - \frac{\log w}{\log z_2} + \frac{u}{v} \right) E'(w) dw.
 \end{aligned}$$

Und weiter ergibt sich durch wiederholte partielle Integration :

$$= \int_{z_1}^{z_2} E(w) \frac{1}{w \log w} \left(1 - u \frac{\log w}{\log u}\right) dw + O\left(b_6 \frac{\log \log 3Nk}{\log h}\right).$$

Setzt man $t := \frac{\log h}{\log w}$, so erhält man:

$$= \int_u^v \wedge \left(\frac{\log \frac{h}{t}}{\log z_1} \right) \left(1 - \frac{u}{t}\right) \frac{dt}{t} + O\left(b_6 \frac{\log \log 3Nk}{\log h}\right)$$

$$(8.11) \quad = \int_u^v \wedge \left(v \left(1 - \frac{1}{t}\right) \right) \left(1 - \frac{u}{t}\right) \frac{dt}{t} + O\left(b_6 \frac{\log \log 3Nk}{\log h}\right).$$

Aus (8.6), (8.7), (8.8), (8.9) und (8.11) folgt die Behauptung (8.5).

Im Folgenden wird Satz 2 spezialisiert.

Es sei für natürliche Zahlen r

$$L_r := r + 1 - \frac{\log \frac{4}{1+3^{-r}}}{\log 3}.$$

Dann folgt für $r \geq 2$

$$(8.12) \quad r + 1 - \frac{\log 4}{\log 3} \leq L_r \leq r + 1 - \frac{\log 3,6}{\log 3}.$$

Satz 3. Sei

$$(8.13) \quad (\alpha, k) = 1 \quad \text{für alle } \alpha \in M,$$

$$(8.14) \quad 0 < \delta \leq \frac{2}{3},$$

$$(8.15) \quad r \text{ so groß gewählt, daß für alle } \alpha \in M \text{ gilt: } |N\alpha| \leq h^{L_r - \delta}.$$

Dann gilt

$$(8.16) \quad \sum_{\substack{\alpha \in M \\ \Omega(\alpha) \leq r}} 1 \geq B \delta \frac{Nk}{f_1(k)G(k)} \frac{C(F)}{\alpha_K} \frac{h}{\log h} \quad \text{für } h \geq H_0(r, \delta, Nk).$$

Ferner gilt für den der Norm nach kleinsten Primidealfaktor ρ_1 eines jeden links gezählten Elementes α : $N(\rho_1) \geq h^{\frac{1}{4}}$.

Beweis. Für jedes $\alpha \in M$, das in (8.3) gezählt wird, gilt wegen (8.13), (8.14)

$$\begin{aligned} 1 - \sigma \sum_{\substack{h^{\frac{1}{v}} \leq N\rho < h^{\frac{1}{u}} \\ \rho/\alpha}} (1 - u \frac{\log N\rho}{\log h}) &\leq 1 - \sigma \left\{ \Omega(\alpha) - u \frac{\log |N\alpha|}{\log h} \right\} \\ &\leq 1 - \sigma \left\{ \Omega(\alpha) - u(L_r - \delta) \right\}. \end{aligned}$$

Man wähle $v = 4$, $u = 1 + 3^{-r}$, $\frac{1}{\sigma} = r + 1 - u(L_r - \delta)$.

Dann wird für $\Omega(\alpha) \geq r+1$ die obige Gewichtsfunktion ≤ 0 .

Also ist, da diese Funktion immer ≤ 1 ist:

$$W_k(M, v, u, \sigma) \leq \sum_{\substack{\alpha \in M \\ (\alpha, P_1(h^{\frac{1}{4}}))=1 \\ \Omega(\alpha) \leq r}} 1.$$

Satz 1 liefert, unter Beachtung von Lemma 4.1, die untere Abschätzung von $W_k(M, v, u, \sigma)$. Die Rechnung kann aus [5], Seite 13 übernommen werden.

9. Satz 3 liefert die folgenden Anwendungsbeispiele.

P_r bezeichne ganze algebraische Zahlen mit höchstens r Primidealfaktoren, also $\alpha \in P_r$, falls $\Omega(\alpha) \leq r$.

Satz 4. Es existieren ganze algebraische Zahlen $\xi \in K$ mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \xi &= P_2 \quad \text{und} \quad y_\nu - y_\nu^{\frac{6}{11}} < \xi^{(\nu)} \leq y_\nu, \quad \nu=1, \dots, n, \quad \text{für } y \geq Y_2, \\ \xi &= P_3 \quad \text{und} \quad y_\nu - y_\nu^{\frac{4}{11}} < \xi^{(\nu)} \leq y_\nu, \quad \nu=1, \dots, n, \quad \text{für } y \geq Y_3, \\ \xi &= P_4 \quad \text{und} \quad y_\nu - y_\nu^{\frac{3}{11}} < \xi^{(\nu)} \leq y_\nu, \quad \nu=1, \dots, n, \quad \text{für } y \geq Y_4, \\ \xi &= P_r \quad \text{und} \quad y_\nu - y_\nu^{\frac{1}{r-\frac{1}{2}}} < \xi^{(\nu)} \leq y_\nu, \quad \nu=1, \dots, n, \quad \text{für } y \geq Y_r. \end{aligned}$$

Beweis. Man wähle $K = (1)$, $F(x) = x$ und $h_\nu = y_\nu^{\frac{1}{L_r - \delta}}$, $\nu=1, \dots, n$.

Dann wird mit (2.3) und (2.4) $M = I$, und mit (2.1) $h = y^{\frac{1}{L_r - \delta}}$.
Damit folgt aus (8.16):

$$\underbrace{\left(y_\nu - y_\nu^{\frac{1}{L_r - \delta}} \right)}_{1} \geq \frac{B \delta}{\alpha_K} \frac{y^{\frac{1}{L_r - \delta}}}{\log y} (L_r - \delta)$$

$$y_\nu - y_\nu^{\frac{1}{L_r - \delta}} < \xi^{(\nu)} \leq y_\nu, \quad \nu=1, \dots, n, \quad \xi \in P_r$$

$$\text{für } 0 < \delta \leq \frac{1}{5}, \quad y \geq Y_1(r, \delta).$$

Aus der Definition von L_r bzw. aus (8.12) folgt.

$$L_2 > \frac{11}{6}, \quad L_3 > \frac{11}{4}, \quad L_4 > \frac{11}{2}, \quad r - \frac{2}{7} < L_r < r - \frac{1}{7}$$

für $r \geq \dots$

Wählt man δ in Abhängigkeit von r hinreichend klein, so ergeben sich die Behauptungen von Satz 4.

Satz 5. Es sei $y_v \geq 1$, $v = 1, \dots, n$.

Dann gilt

$$\sum_{\substack{\alpha \in M \\ \alpha = P_{j^r}}} 1 \geq \frac{2}{3} B \frac{C(F)}{\alpha_k} \frac{y}{\log y} \quad \text{für } y \geq Y_0(K, F).$$

Beweis. Man wähle in Satz 3 $k = \{1\}$, $\delta = \frac{2}{3}$, $r = g+1$.

Ferner sei $h_v = y_v$, $v = 1, \dots, n$; dadurch wird $h = y$.

Es bleibt nachzuprüfen, ob die Voraussetzung von Satz 3, $|N\alpha| \leq y^{L_{g+1} - \frac{2}{3}}$ für alle $\alpha \in M$, erfüllt ist.

Nach (8.12) ist $g < L_{g+1} - \frac{2}{3}$.

Es ist weiter $|N\alpha| = |N F(\xi)| = |F(\xi)^{(1)} \dots F(\xi)^{(n)}|$, $\xi \in I$.

Mit $F(x) = \alpha_g x^g + \dots + \alpha_0$ folgt für $v = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} |F(\xi)^{(v)}| &\leq (g+1) \max \left\{ |\alpha_i| / \left| \frac{v}{i} = 1, \dots, n \right. \right\} \max \left\{ |\xi|^g, 1 \right\} \\ &\leq c_{12} \max \left\{ y_v^{\frac{g}{v}}, 1 \right\}, \quad c_{12} = c_{12}(K, F) \\ &\leq c_{12} y_v^{\frac{g}{v}}, \quad \text{nach Voraussetzung über } y_v. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$|N\alpha| \leq y^{L_{g+1} - \frac{2}{3}} \quad \text{für } y \geq Y_0(K, F).$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Die Sätze 4 und 5 sind in der Einleitung als Satz A und Satz B zitiert.

Literatur

- [1] P. Bateman, R. Stemmler, Waring's problem for algebraic number fields, Illinois J. Math., 6 (1962), S. 142 - 156.
- [2] E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, B. G. Teubner Verlag, 1918.
- [3] T. Nagel, Généralisation d'un théorème de Tchebycheff, Journal de Mathematiques (8), 4 (1921), S. 343 - 356.
- [4] W. B. Jurkat, H.-E. Richert, An improvement of Selberg's sieve method I, Acta Arith., 11 (1965), S. 217 - 240.
- [5] H.-E. Richert, Selberg's sieve with weights, J. of pure and applied Math., 16 (1969), S. 1 - 22.
- [6] G. J. Rieger, Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper III, J. reine angew. Math., 208 (1961), S. 79 - 90.
- [7] W. Schaal, Obere und untere Abschätzungen in algebraischen Zahlkörpern mit Hilfe des linearen Selberg'schen Siebes, Acta Arith., 13 (1968), S. 267 - 313.
- [8] C. L. Siegel, Additive Theorie der Zahlkörper II, Math. Annalen, 88 (1923), S. 184 - 210.
- [9] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra I, van Nostrand Company,

Lebenslauf

Am 10. April 1944 wurde ich, Heidrun Sarges, geb. Ebert, als Tochter des Mechanikers Johann Ebert und seiner Ehefrau Herta in Prostken (Ostpreußen) geboren.

Ich bin in Wetzlar aufgewachsen und ging dort zur Schule. Im Frühjahr 1963 legte ich das Abitur ab.

Nachdem ich ein Jahr bei einer italienischen Familie verbracht hatte, begann ich 1964 in Marburg mit dem Studium der Mathematik.

Nach einem einsemestrigen Aufenthalt an der Freien Universität Berlin kam ich nach Marburg zurück und legte dort im Oktober 1968 die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Ich hörte Vorlesungen insbesondere bei den Herren Professoren Doebner, Großmann, Grottemeyer, Körner, Meschkowski, Peyerimhoff, Richert, Schaal, H. A. Schmidt, Walcher, Wirsing und Wolter.

In meiner Diplomarbeit gab ich einen kurzen, neuen Beweis des Hilbertschen Basissatzes an.

Seit Oktober 1969 bin ich als wissenschaftliche Angestellte am Mathematischen Institut in Marburg tätig.

Ich bin seit 1966 mit dem Graphiker Karl August Sarges verheiratet; wir haben einen vierjährigen Sohn.

